

RAPPORT FINAL DU PROJET MIRACCLE

10-MCGOT-GICC-2-CVS-097
2010 – n° CHORUS 2100 18 4568

RECAPITULATIF DU PROJET

Titre du projet : Mesures et Indicateurs de Risques Adaptés au Changement CLimatiquE

- **Acronyme** : MIRACCLE

- **Mots-clés** : Mesure de risques, Extrêmes, Assurabilité des risques climatiques, Aide à la décision, Changement climatique, Impact du changement climatique sur les marchés financiers.

- **Thèmes de l'APR concernés** : La question des extrêmes : risques et vulnérabilité; L'évaluation économique.

Responsable/coordonateur scientifique :

- Pierre Ribereau, Maître de Conférences à l'Université Lyon 1
50 Avenue Tony Garnier
Tel : 04 37 28 74 39
Mél : pierre.ribereau@univ-lyon1.fr

- **Laboratoires impliqués dans le projet** : Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier (I3M), Laboratoire de Sciences Actuarielles et Financières (LSAF), Laboratoire des Sciences du Climat et de l'Environnement (LSCE).

Durée du projet : 36 mois



**MINISTÈRE DE L'ÉCOLOGIE, DU
DEVELOPPEMENT DURABLE ET DE
L'ÉNERGIE**

Table des matières

I	Introduction et mise en contexte	2
1	Pourquoi de nouvelles mesures de risque?	2
2	Pourquoi utiliser les processus max-stables?	3
3	Comment intégrer la dépendance spatiale?	3
4	Comment intégrer la durée du phénomène?	4
II	Résumé des thèses liées au projet Miracclle	4
1	Erwan Koch	4
2	Thomas Opitz	6
3	Romain Chailan	7
III	Etat général d'avancement du projet	8
1	WP 1 : Modèles et méthodes pour extrêmes spatiaux	8
	a. Principaux résultats	10
	b. Autres résultats	15
2	WP2 : Détection de tendance dans les extrêmes	17
	a. Principal résultat	17
	b. Autre résultat	21
3	WP3 : Nouvelles mesures de risques	21
	a. Principaux résultats	21
	b. Autres résultats	23
4	WP4 : Assurabilité des risques climatiques	23
	a. Principaux résultats	23
	b. Autres résultats	31
IV	Poursuite du projet	31
V	Conférences, articles publiés, acceptés ou soumis	32
1	Conférences	32
2	Articles publiés ou acceptés	33
3	Articles soumis pour publication	36

I Introduction et mise en contexte

1 Pourquoi de nouvelles mesures de risque ?

Aujourd'hui, la mesure de risque la plus utilisée est le niveau de retour pour x années noté z_x . C'est à dire le niveau que l'on s'attend à ne voir dépasser qu'une seule fois en moyenne au cours des x prochaines années. En termes plus mathématiques, cela signifie que si la distribution qui génère le maximum annuel a pour fonction de répartition F , ce niveau de retour vaut $z_x = F^{-1}(1 - 1/x)$. Malgré son utilisation très répandue, il y a toutefois des problèmes concernant l'utilisation de cet indicateur.

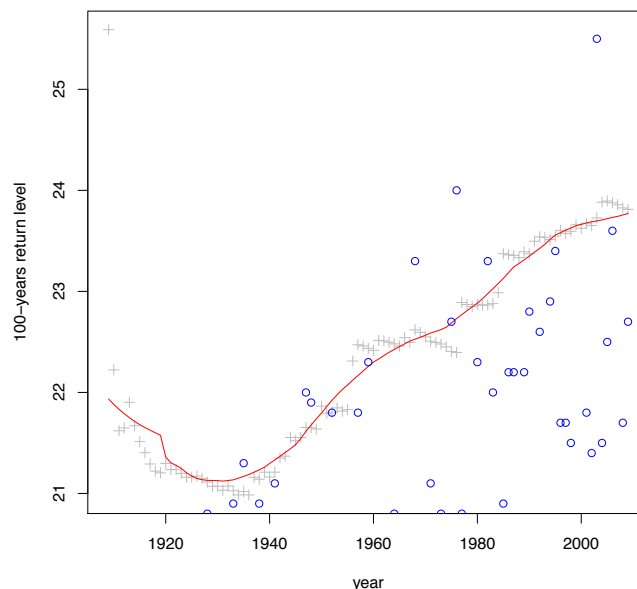


FIGURE 1 – Niveaux de retour 100 ans estimés pour le minimum des températures à Paris en été (températures nocturnes en été). Les croix représentent le niveau estimé chaque année en se basant sur les années précédentes, les cercles sont les maximales annuelles de ces températures minimales et la courbe rouge représente un lissage des estimations des niveaux de retour.

D'abord, le niveau de retour n'est pas adapté aux séries de données non stationnaires ce qui est clairement le cas lorsque l'on considère les sciences climatiques. A titre d'exemple, dans la figure 1, nous avons considéré les minimums de température à Paris en été. Cette variable est importante d'un point de vue sanitaire puisqu'une exposition à des températures nocturnes élevées peut entraîner chez les personnes âgées des coups de chaleur pouvant causer le décès. Pour chaque année depuis 1910, nous avons calculé le niveau de retour 100 ans en utilisant les techniques habituelles (estimateur POT) en supposant la stationnarité des données. Le résultat est que le niveau de retour estimé en 1910 n'aurait du être dépassé qu'une seule fois au cours du siècle, or nous pouvons observer qu'il a été dépassé près d'une fois sur deux.

Le niveau de retour peut être amélioré en privilégiant une définition comme celle dans Ribereau, P., Naveau, P. et Guillou, A. (2010). Dans le cas non stationnaire, on suppose que chaque X_t a une fonction de répartition F_t et on calcule z_x comme

$$z_x \text{ tel que } \sum_{i=1}^x (1 - F_t(z_x)) = 1.$$

A noter que cette définition coïncide avec la définition dans le cas stationnaire.

Ensuite le niveau de retour ne donne pas une idée de la durée de l'épisode. Si nous revenons à la canicule de 2003, le problème principal est venu de la durée de l'épisode. Or, estimer un niveau de retour à une certaine valeur ne nous renseigne pas sur le temps que la variable considérée va passer au dessus de ce seuil et cette durée peut être très importante lorsque l'on considère la température ou les précipitations.

Finalement le niveau de retour ne tient pas compte d'une éventuelle dépendance spatiale. De nouveau, la canicule de 2003 a été remarquable par l'étendu de la région qu'elle a touchée. Nous pouvons évidemment faire des cartes de niveaux de retour en estimant point par point ce niveau mais ceci revient à supposer l'indépendance entre les sites (ce qui est absurde pour des variables comme la température).

2 Pourquoi utiliser les processus max-stables ?

Les processus max-stables apparaissent comme les processus limites lorsque l'on considère des processus spatiaux. Par exemple, sur une région donnée, on considère le processus de température quotidien, et si on considère le maximum de ces processus, asymptotiquement nous arrivons vers un processus max-stable. C'est donc la "version spatiale" de la distribution des Extrêmes Généralisés sur laquelle on se base pour estimer des niveaux de retour extrêmes.

C'est donc le candidat idéal si l'on veut créer des mesures de risques extrêmes qui tiennent compte de la dépendance spatiale. Par exemple, le projet ANR MOPERA a développé des cartes de niveaux de retour (pour la neige) conditionnels à une observation, ce qui permet de cartographier le risque conditionnellement à cette observation.

3 Comment intégrer la dépendance spatiale ?

Erwan Koch a travaillé sur des mesures de risques qui sont basées sur la variance de l'intégrale de l'indicatrice du dépassement d'un certain seuil. Cette mesure de risque présente l'avantage de tenir compte de la dépendance spatiale des extrêmes. De plus, cette mesure est facilement adaptable pour définir des mesures de risques sur les montants de sinistres sur une région donnée pour un certain risque climatique. Il reste toutefois à passer de la théorie à la pratique en calculant ces mesures de risque sur des données réelles.

4 Comment intégrer la durée du phénomène ?

Sur une idée de Pierre Ribereau, Romain Biard et ses co-auteurs ont travaillé sur une mesure définie comme l'espérance de l'intégrale d'un processus au dessus d'un certain seuil (cf Figure 2), dite aussi "Aire en rouge" et des versions plus sophistiquées spécifiques aux périodes de canicule. Ces mesures de risque ont été développées pour les températures en supposant que la température suivait un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Là encore, il reste des problèmes d'ordre pratique (réalité de l'ajustement de la température par un processus d'Ornstein Ullenbeck, estimation des paramètres d'un tel processus..)

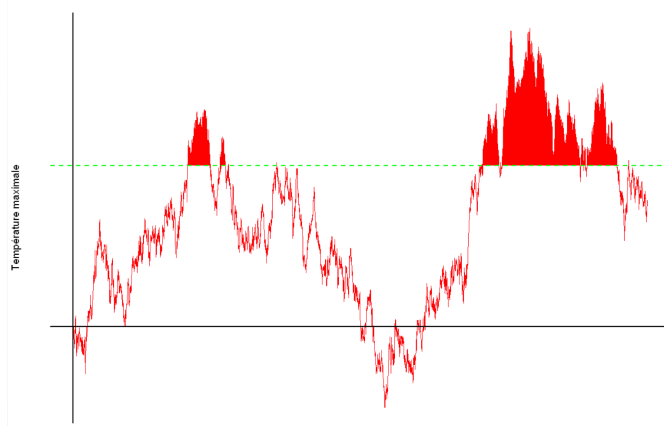


FIGURE 2 – Exemple de mesure pour la température. La courbe rouge représente la courbe de température, la ligne verte en pointillé le seuil que l'on se fixe et la surface en rouge est la mesure de risque associé à ce processus et à ce seuil.

II Résumé des thèses liées au projet Miracle

1 Erwan Koch

La thèse d'Erwan Koch était financée à 100% par le projet Miracle et était co-dirigée par C. Robert et P. Ribereau. La soutenance est prévue pour Mars 2014.

Erwan Koch a commencé par travailler sur les méthodes d'estimation pour les processus max-stables. En effet, à l'heure actuelle, il n'y a que peu de méthodes d'estimation (principalement la vraisemblance composite) qui ne sont pas entièrement satisfaisantes sauf lorsque l'on dispose d'historiques très longs et que l'on suppose que la structure de dépendance des extrêmes ne varie pas dans le temps. Erwan Koch s'inspire de techniques d'économétrie et les applique dans le cadre beaucoup plus complexe des processus max-stables. L'idée est d'estimer la vraisemblance des mesures observées et de la comparer avec des vraisemblances simulées. Le principal avantage de cette technique est qu'elle permet (théoriquement) d'obtenir des estimations même lorsque l'on dispose de peu d'années d'observations mais que l'on a

beaucoup de stations. Les résultats théoriques sont consistants et les résultats numériques sont prometteurs. L'article (avec C. Robert et P. Ribereau) correspondant est en cours de rédaction.

Erwan Koch a ensuite travaillé sur les mesures de risques spatiales déjà évoquées dans la section I. L'idée est, pour une région A donnée de considérer la quantité

$$L(A) = \frac{1}{|A|} \int_A \mathbb{1}_{[Z(x) > u]} dx$$

pour un processus Z qui représente la variable climatique et un seuil u fixé. Si Z est le processus qui génère les précipitations, cette quantité est la proportion de la région A qui a eu des précipitations supérieures à u . Cette quantité permet de comparer deux régions données et de regarder ainsi leur "dangerosité".

D'un point de vue mathématiques, une première quantité d'intérêt est

$$R_1(A) = \mathbb{E}(L(A))$$

mais cette quantité ne dépend pas de la structure de dépendance spatiale. La quantité qu'E. Koch a étudiée est

$$R_2(A) = \mathbb{V}(L(A)).$$

Pour cette mesure, E. Koch a montré qu'il s'agissait d'une mesure de risque cohérente. En se basant sur la quantité

$$L(A) = \int_A Z(x)^\beta dx$$

on obtient des quantités qui représentent les sinistres liés à un risque climatique sur une région A (typiquement les sinistres liés au vent sont une fonction puissance de la vitesse du vent). L'étude de ces mesures de risque permet de mieux tarifier les produits comme les catastrophe bond. L'article correspondant est en cours de rédaction.

Erwan Koch a aussi travaillé sur des générateurs de pluie en transposant des modèles de contagion utilisés en finance aux phénomènes climatiques. En finance, on définit des modèles de contagion lorsqu'un établissement est en crise ou en faillite et que son défaut va affecter d'autres établissements et ainsi de suite. L'idée d'Erwan Koch est d'utiliser les mêmes principes pour la pluie. Une tempête touche une station, et la tempête va se propager vers d'autres stations qui sont liées à la première d'après certains critères (distance géographique, orientation, facteur commun...). Ainsi, à partir d'une situation initiale, ce modèle permet de générer des précipitations. Ce modèle a été appliqué avec succès à plusieurs stations en Bretagne et présenté au 12ième International Meeting on Statistical Climatology. L'article (avec P. Naveau) est en cours de rédaction et va être soumis à Water Resources research.

Le dernier travail d'Erwan Koch n'est pas directement lié au projet Miracelle et met en évidence comment les établissements financiers doivent diversifier leurs risques pour se trouver en situation d'équilibre. Cet article (avec J.C. Héam) est en

cours de rédaction.

Globalement, Erwan Koch a été moteur dans le projet Miracclle puisque ses travaux touchent directement 3 groupes de travail. Sa thèse qui sera soutenue en mars contient des résultats qui auront un impact important dans les domaines concernés. Il devrait continuer ses travaux de thèse par un post-doc à partir de septembre 2014 soit au RiskLab à ETH Zurich, soit à l'Earth Institute avec le soutien de l'University Columbia. Nous comptons lui proposer un financement de post-doc avec les crédits restants du projet entre mars et juin 2014.

Travaux d'Erwan au cours de sa thèse :

Héam, J.C., and Koch, E. *Diversification and endogenous financial networks*. En cours de rédaction.

Koch, E. *Spatial risk measures based on max-stable processes*. A soumettre à Insurance : Mathematics and Economics.

Koch, E., and Naveau, P. *A multi-site hourly precipitation generator based on a frailty-contagion approach*. A soumettre à Water Resources Research.

Koch, E., Ribereau, P. and Robert, C.Y. *Estimation of max-stable processes by simulated maximum likelihood*.

2 Thomas Opitz

Thomas Opitz a soutenu sa thèse intitulée “Extrêmes multivariés et spatiaux : approches spectrales et modèles elliptiques” le 30 octobre 2013 à Montpellier, sous la direction de J.N. Bacro et de P. Ribereau. Elle était financée par un contrat doctoral du ministère de la recherche. Ses travaux de thèse étaient principalement orientés vers les processus max-stables.

Le premier résultat de Thomas Opitz concerne les extrêmes multivariés en résolvant le problème de l'ambiguïté de la définition des observations extrêmes multivariées en les identifiant aux dépassements d'une variable structurelle “agrégée” au dessus d'un seuil fixé. Cela lui permet alors de définir les lois radiales de Pareto et de Pareto inversés (lorsque l'on s'intéresse aux petites valeurs).

Thomas Opitz a ensuite travaillé sur un nouvel outil pour l'inférence extrême de processus max-stables. L'idée de cet outil est d'étendre les résultats existants pour les extrêmes bidimensionnels au cas spatial. En dimension d , les extrêmes sont caractérisés par la mesure spectrale, qui représente en quelque sorte l'angle des observations lorsque l'on se place en coordonnées pseudo-polaires. En spatial, on considère alors tous les couples de stations et on estime la densité spectrale. On trace toutes ces densités spectrales en fonction de la distance qui sépare les stations et on recons-

truit la surface. Ce spectrogramme peut donc être vu comme une version “extrême” plus complète du variogramme. On obtient ainsi une idée claire de la structure de dépendance des extrêmes en fonction de la distance entre deux sites. Cet article (avec J.N. Bacro et P. Ribereau) est soumis.

Pour finir, Thomas Opitz a développé un nouveau modèle d’extrêmes spatiaux, le processus t -extrême. Ce processus est plus souple que le processus de Schlather qu’il généralise. Ce modèle a été appliqué sur les précipitations dans les Cévennes et pour des vitesses de vents au Pays-Bas. L’article est publié à *Journal of Multivariate Analysis*. Ce papier a un impact important puisque d’autres chercheurs se sont alors penchés dessus. En particulier, la simulation conditionnelle de ce processus est effective, a été étudiée par A. Bechler et M. Ribatet et est mise en oeuvre sur des données de précipitations et étudiée dans un cadre de downscaling des extrêmes (A. Bechler, L. Bel, M. Vrac).

Les travaux de Thomas Opitz ont eu un fort impact sur la communauté des extrêmes multivariés et spatiaux.

Travaux de Thomas Opitz au cours de sa thèse :

Opitz, T. (2013) *Extremal t processes : Elliptical domain of attraction and a spectral representation* à paraître dans *Journal of Multivariate Analysis*.

Opitz, T., Bacro, J.-N. et Ribereau, P. *The spectrogram : A threshold-based inferential tool for extremes of stochastic processes*. Soumis.

Opitz, T. *Multivariate extremal inference with radial Pareto distributions and inverted radial Pareto distributions.*, Soumis.

3 Romain Chailan

La thèse CIFRE (financée par IBM) de Romain Chailan s’inscrit dans le cadre d’un projet de recherche collaboratif nommé LittoCMS (financé par Fonds Unique Interministériel). La problématique du projet est de proposer un outil d’aide à la décision, visant à aider à la gestion du risque inondation en zone littorale.

Les innovations apportées par l’approche du projet LittoCMS résident dans

1. l’imbrication automatisée d’une série de modèles géophysiques,
2. l’utilisation ergonomique d’une infrastructure informatique de haute performance
3. l’application de techniques statistiques innovantes comme l’étude des événements extrêmes.

Les acteurs du secteur privé BRLi (eau), IBM (IT), Geomatys (geomatique) et ceux du secteur public HPC@LR (ressources IT), UM2 (code géophysique et analyse

statistique) travaillent conjointement dans le but de mener à bien ce projet interdisciplinaire.

Cette thèse est encadrée par Anne Laurent (LIRMM, UM2), Frédéric Bouchette (Géosciences, UM2), Gwladys Toulemonde (I3M, UM2) et Olivier Hess (IBM).

La thèse de Romain Chailan vise à modéliser les hauteurs de vagues dans le golfe du lion et proposer ainsi un modèle de simulations qui permettent d'estimer des mesures de risques sur le littoral à partir de cette modélisation de hauteur de vagues. Cette thèse allie le calcul scientifique (modèle de propagation des vagues) et analyse statistique (pour les extrêmes) pour la gestion du risque en milieu littoral.

L'an dernier, il a obtenu le prix "IBM Phd Fellowship". Ce prix récompense des travaux de thèse innovants de la stratégie "Smarter Planet" d'IBM.

III Etat général d'avancement du projet

Le projet repose sur quatre piliers, à savoir le développement de nouveaux modèles d'extrêmes adaptés au changement climatique, la détection de tendances et de ruptures, la construction et l'étude de mesures de risques et finalement l'impact du changement climatique sur l'assurance et la réassurance ainsi que sur les produits financiers climatiques. Par la suite, nous développons les principaux résultats obtenus dans chaque groupe de travail.

1 WP 1 : Modèles et méthodes pour extrêmes spatiaux

En dimension 1, la théorie des valeurs extrêmes nous donne le résultat suivant : Soit $(X_i)_i$ une suite de variables aléatoires et identiquement distribuées. On pose :

$$Z_n = \max_{i=1, \dots, n} \{X_i\}.$$

Si il existe des suites normalisantes $(a_n)_n$ et $(b_n)_n > 0$ et une distribution G non dégénérée telles que

$$\frac{Z_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} G$$

alors G est nécessairement une distribution des extrêmes généralisée (GEV). On peut obtenir un résultat similaire sur la distribution des excès au dessus d'un seuil avec une convergence vers une distribution de Pareto généralisée (GPD).

Ces résultats permettent ainsi la construction des estimateurs du niveau de retour où l'on va approcher la distribution de maxima par une GEV ou la distribution d'excès par une GPD.

En dimension supérieure, on a un résultat similaire : si $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,d})$ pour $i = 1, \dots, n$ sont des vecteurs aléatoires de dimension d et de fonction de répartition

F , on suppose qu'il existe des suites dans \mathbb{R}^d $(\mathbf{a}_n)_n$ et $(\mathbf{b}_n)_n$ où $a_{n,j} > 0$ et $b_{n,j} \in \mathbb{R}$ pour tout $j = 1, \dots, d$ et une fonction de répartition G de marginales non dégénérées telles que

$$\mathbb{P} \left(\frac{\max_{i=1, \dots, n} \mathbf{X}_i - \mathbf{b}_n}{\mathbf{a}_n} \leq \mathbf{x} \right) = F^n(\mathbf{a}_n \mathbf{x} + \mathbf{b}_n) \longrightarrow G(\mathbf{x})$$

quand $n \rightarrow \infty$. La distribution G est alors une distribution des extrêmes multivariés. Si on se ramène à une distribution avec des marginales Fréchet, on peut montrer que G est de la forme :

$$G(x, y) = \exp(-V(x, y)), \quad x > 0, y > 0$$

où

$$V(x, y) = 2 \int_0^1 \max \left(\frac{\omega}{x}, \frac{1-\omega}{y} \right) dH(\omega)$$

et H est une distribution sur $[0, 1]$ qui vérifie la contrainte de moyenne suivante :

$$\int_0^1 \omega dH(\omega) = 1/2.$$

La mesure H est alors appelée mesure spectrale et représente en quelque sorte la mesure correspondant à l'angle des extrêmes si on se place dans des coordonnées pseudo-polaires. C'est donc cette mesure spectrale qui caractérise la dépendance des extrêmes multivariés.

Il existe alors une extension "naturelle" au cas spatial : Considérons un processus stochastique $Y(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^2$ pour simplifier (on peut supposer $x \in \mathbb{R}^d$), ce processus est supposé continu. Comme ce sont les extrêmes qui nous intéressent, on va se concentrer sur le processus limite suivant :

$$\left\{ \max_{i=1, \dots, n} \frac{Y_i(x) - b_n(x)}{a_n(x)} \right\}_{x \in \mathbb{R}^2} \longrightarrow \{Z(x)\}_{x \in \mathbb{R}^2}$$

avec $Y_i(x)$ qui sont des réalisations du processus $Y(x)$ et $a_n(x) > 0$ et $b_n(x)$ sont deux suites de fonctions continues. Le processus limite $Z(\cdot)$ est non dégénéré. La classe des processus limites est celle des processus max-stables.

Ces processus max-stables apparaissent donc comme une version "spatiale" de la GEV. Ces processus stochastiques peuvent se construire en utilisant le résultat suivant : si on définit Z par

$$Z(x) = \max_{i \geq 1} \xi_i Y_i(x) \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$

où $(\xi_i)_i$ sont les points d'un processus de Poisson sur $]0, \infty[$ d'intensité $d\Lambda(\xi) = \xi^{-2} d\xi$ et les Y_i sont des répliques indépendantes d'un processus Y continu, non négatif tel que $\mathbb{E}(Y(x)) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Les problèmes principaux concernant les extrêmes spatiaux pour le projet Miracle sont :

- Il y a peu de modèles d’extrêmes spatiaux.
- Il n’existe pour ainsi dire qu’une seule méthode d’inférence pour les processus max-stables (la vraisemblance composite). Même si cette méthode donne de bons résultats, il lui faut quand même une taille d’échantillon importante (en climat, cela revient à avoir beaucoup d’années d’observations). Cela est souvent difficiles à avoir. Au delà de ces problèmes, il est toujours préférable d’avoir plusieurs méthodes d’estimation et de ne pas se fier aveuglement à une technique.
- Lorsque l’on observe une réalisation d’un processus max-stables en certains points, peut-on reconstruire complètement la réalisation ? C’est à dire, si j’observe le maximum annuel en certaines stations, peut-on reconstruire le maximum annuel pour chaque point de la région ?

Les articles détaillés par la suite répondent aux deux dernières questions mais d’autres résultats ont été obtenus pour le premier point.

a. Principaux résultats

Dombry, C., Eyi-Minko, F. et Ribatet, M. (2013). *Conditional simulations of max-stable processes*. *Biometrika* 100(1), pp111-124.

Dans cet article, C. Dombry et ses co-auteurs se basent sur un article de C. Dombry et F. Eyi-Minko qui donne les distributions conditionnelles de processus max-stables. En d’autres termes, si nous prenons un processus max-stables, on observe en certaines stations la réalisation de ce processus, ils obtiennent la loi de ce processus en tout point de la région conditionnellement aux observations dans les stations.

La simulation de processus max-stable n’est pas une chose aisée puisqu’en principe, un processus max-stable est défini comme un maximum sur une infinité de réalisation de processus mais il existe des techniques pour contourner ce problème. Là encore, les auteurs arrivent à obtenir des outils pour simuler ces processus conditionnellement aux observations.

Plutôt que de trop détailler ce papier, nous présentons ici quelques résultats et applications possibles et intéressantes. Dans la Figure 3, on a représenté au travers d’une simulation, une utilisation de ces résultats. Par exemple, le premier graphique en haut à gauche représente la réalisation d’un processus de Brown-Resnick (ligne grise) avec un certain semi-variogramme. On fixe 5 sites qui seront nos observations conditionnantes. C’est à dire que l’on aura accès uniquement à l’information contenue dans ces sites. On simule 1000 processus de Brown-Resnick qui passent par nos points conditionnants. Les 3 courbes noires représentent (de bas en haut) les quantiles empiriques ponctuels d’ordre 0.025, 0.5 (moyenne) et 0.975. Ainsi, on peut considérer la moyenne comme étant une estimation de la réalisation du processus de Brown-Resnick et les deux quantiles comme définissant un intervalle de confiance à 95%.

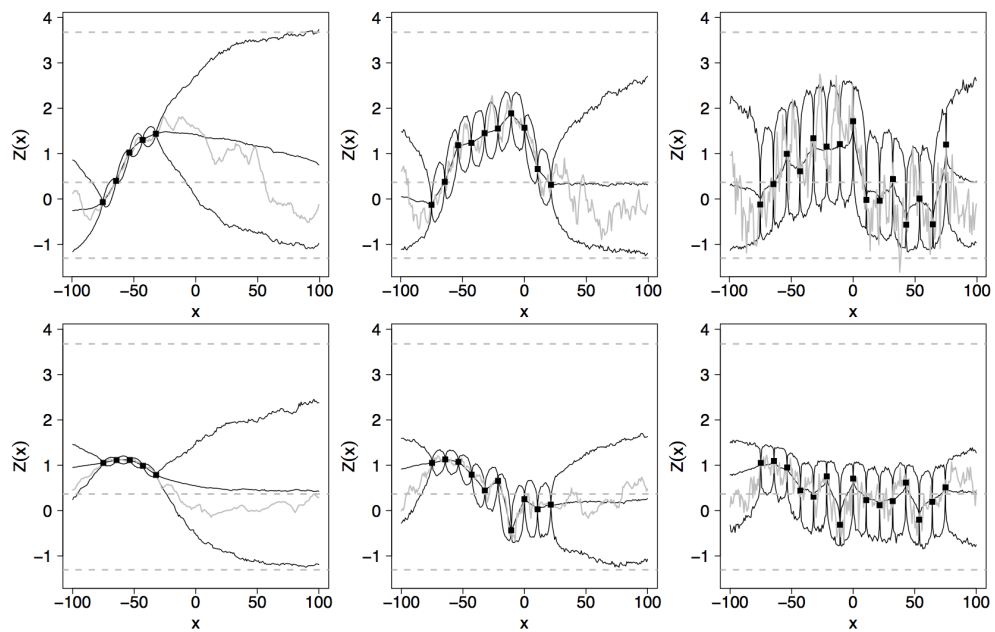


FIGURE 3 – Estimation ponctuelle des quantiles d'ordre 0.025, 0.5 et 0.975 basée sur 1000 simulations conditionnelles pour des processus max-stables de marginales Gumbel pour 5, 10 et 15 sites. La ligne du haut représente les résultats pour le Brown-Resnick avec 3 semi-variogrammes différents, celle du bas pour le processus de Schlather avec 3 fonction de corrélation différentes. Les carrés sont les observations conditionnantes et la ligne grise est la réalisation originale.

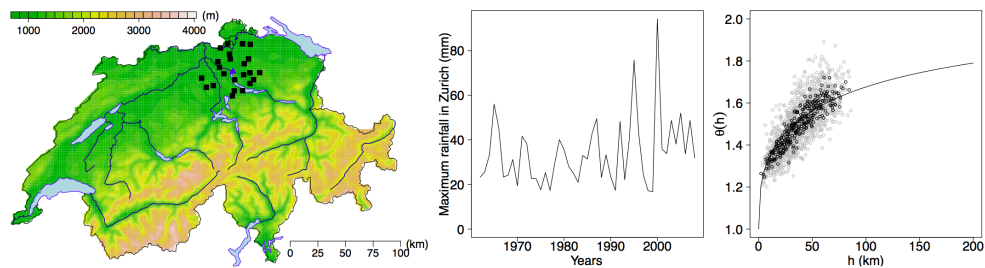


FIGURE 4 – Gauche : Carte de la Suisse montrant les stations utilisées. Milieu : Maximum annuel de précipitations à Zurich. Droite : Comparaison entre le coefficient extrême estimé et celui d’un Brown-Resnick.

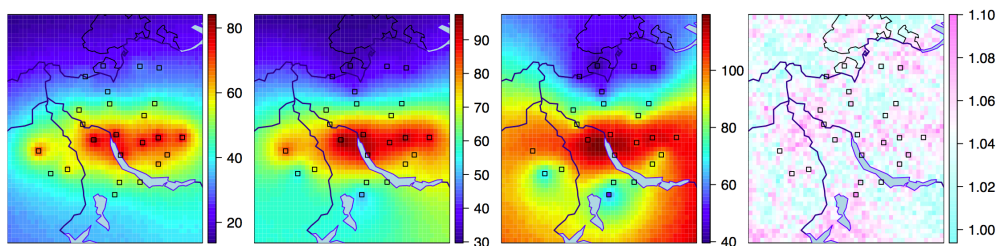


FIGURE 5 – Carte des quantiles conditionnels estimés en se basant sur 10000 simulations. De gauche à droite : quantile 0.025, 0.5 et 0.975. La figure de droite montre l’impact de l’incertitude sur l’estimation des paramètres.

Les auteurs ont aussi travaillé sur des données de précipitations en Suisse. La Figure 4 montre la carte de la Suisse avec les stations d’observations, puis à titre d’information le maximum annuel de précipitation quotidienne à Zurich et finalement une comparaison entre le coefficient extrême estimé et celui d’un processus de Brown-Resnick qui montre que ce processus est adapté pour ces données.

La Figure 5 montre ainsi les cartes que l’on peut obtenir de quantiles spatiaux estimés conditionnellement aux observations.

Ces techniques de simulation conditionnelle permettent donc de faire une sorte de “krigeage” sur des processus max-stables. En plus, ces outils peuvent être utilisés dans le cadre de down-scaling pour les extrêmes.

Opitz, T., Bacro, J.-N. et Ribereau, P. *The spectrogram : A threshold-based inferential tool for extremes of stochastic processes*, soumis.

T. Opitz et ses co-auteurs ont créé un nouvel outil exploratoire pour les extrêmes spatiaux : le spectrogramme. L’idée est, pour un processus max-stable donné de

réunir la collection des mesures spectrales pour tous les couples (x, y) . Si le processus est isotropique, cette mesure spectrale ne dépend que de la distance entre les sites.

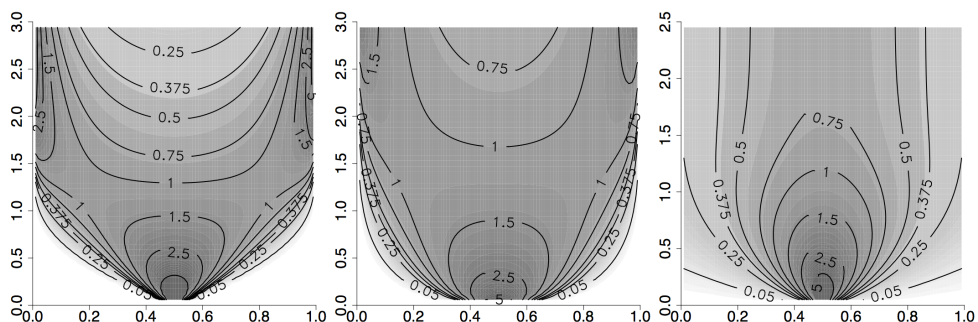


FIGURE 6 – Exemple de Spectrogramme de densité. L'angle est en abscisse et la distance en ordonnées pour des modèles isotropiques. A Gauche, processus de Smith, milieu Brown-Resnick et extremal gaussien à droite.

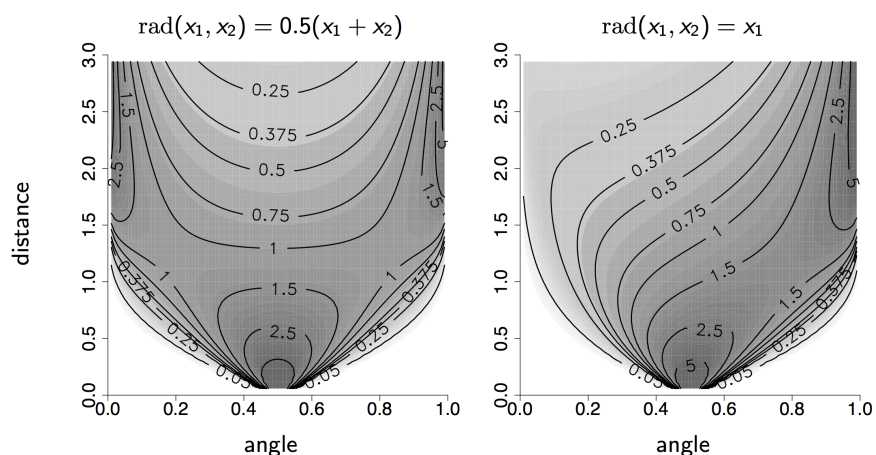


FIGURE 7 – Exemple de Spectrogramme de densité pour le processus de Smith suivant la fonction radiale choisie.

La Figure 6 représente différents spectrogrammes théoriques pour différents modèles. Si la densité spectrale met beaucoup de masse en 0.5 alors on est proche de la dépendance parfaite, à l'inverse si la masse se concentre autour de 0 et de 1, on se rapproche de l'indépendance. Le spectrogramme donne alors clairement une idée de la forme de la dépendance spatiale pour les extrêmes. La forme du spectrogramme et son interprétation dépend clairement du choix de la norme et de la fonction radiale choisies lors du passage aux coordonnées pseudo-polaires (cf Figure 7 pour les Spectrogramme d'un processus de Smith avec deux fonctions radiales différentes, d'un côté la moyenne des deux coordonnées, de l'autre uniquement la première observation.)

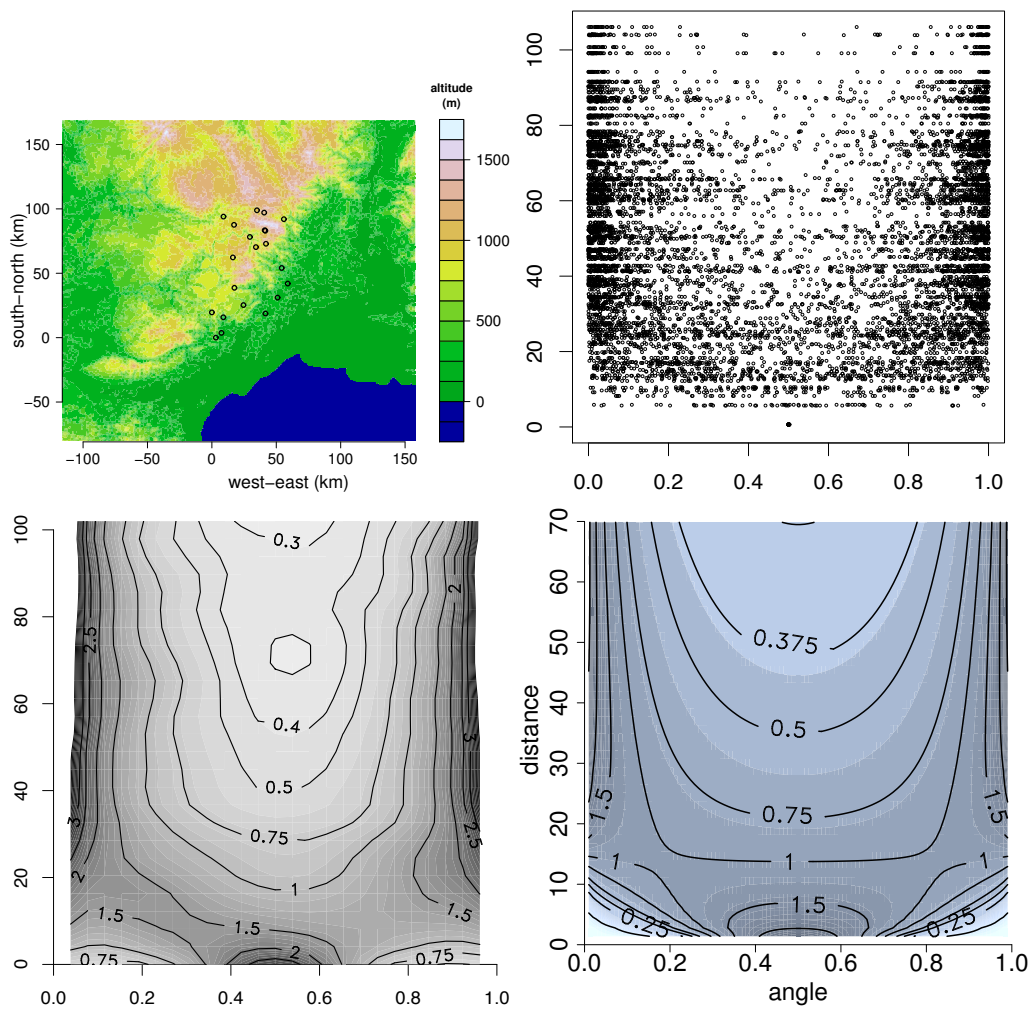


FIGURE 8 – Application du spectrogramme aux précipitations dans les Cévennes : En haut à gauche, emplacement des stations utilisées ; en haut à droite : Spectrogramme empirique pour les excès simples (une seule des deux composantes) ; en bas à gauche : Spectrogramme lissé ; en bas à droite : Spectrogramme ajusté sur le modèle extremal- t .

L'avantage du spectrogramme, c'est qu'il se base sur toutes les observations, c'est à dire que si on s'intéresse à un phénomène climatique, on utilisera les observations quotidiennes pour estimer la densité spectrale alors que lorsque l'on ajuste directement un modèle max-stable par vraisemblance composite, on se base uniquement sur le maximum annuel. Il y a donc un gain d'informations important par rapport aux méthodes habituelles.

On peut ensuite utiliser le spectrogramme pour ajuster un modèle max-stable. Il y a donc un double avantage au spectrogramme. D'une part, il peut servir d'outil exploratoire pour les extrêmes spatiaux (il généralise les outils existants) en indiquant la forme de la dépendance spatiale et d'autre part, à faire de l'inférence sur ces modèles là.

A titre d'exemple, on applique le spectrogramme aux précipitations dans les Cévennes. La Figure 8 montre la carte avec les stations qui ont été utilisées pour l'étude (en haut à gauche). En haut à droite, on a représenté le spectrogramme empirique, c'est à dire l'estimation empirique de la densité spectrale pour chaque couple de stations. Pour avoir le plus d'informations possibles, on garde les observations lorsque les excès sont sur une seule des deux stations. En bas à gauche, nous avons représenté une version lissée par noyau du spectrogramme et finalement en bas à droite le spectrogramme pour le modèle retenu : le modèle extremal- t . Ceci peut ensuite être utilisé pour créer des cartes de niveaux de retour conditionnels spatiaux.

b. Autres résultats

Pour l'inférence pour les processus max-stables, E. Koch, P. Ribereau et C. Robert vont publier un article sur la vraisemblance simulée. Il s'agit d'une technique utilisée en économétrie qui consiste à simuler différents modèles et à regarder lequel se rapproche le plus de nos observations.

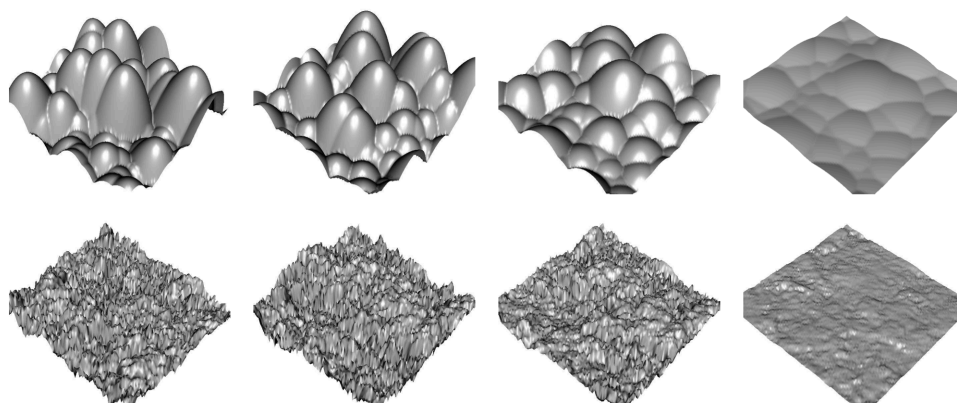


FIGURE 9 – Exemple de simulations du processus max-max stables : En haut pour le processus de Smith, en bas pour le processus de Schalter.

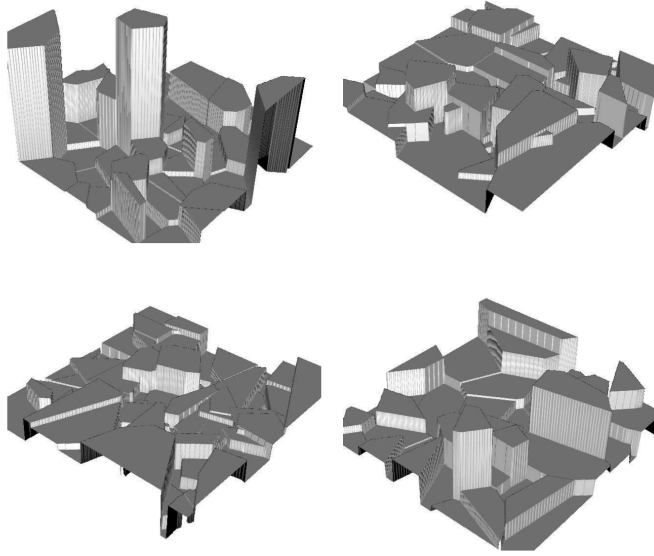


FIGURE 10 – En haut à gauche, simulation du processus de Voronoï avec une loi lognormal. Ensuite, exemples de simulations du processus max-stable de Voronoï pour différentes distributions sous-jacentes (en haut à droite lognormal; en bas à gauche, exponentielle; en bas à droite, Fréchet).

T. Opitz a aussi développé un nouveau modèle de processus max-stable : l'extremal- t . Ce modèle est une extension spatiale de la copule extremal- t . On peut le définir en remplaçant dans (1) Y_i par :

$$Y_i(x) = c_\nu \max \{0, \varepsilon(x)\}^\nu$$

avec :

$$c_\nu = \pi^{1/2} 2^{-(\nu-2)/2} \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^{-1}, \quad \nu \geq 1,$$

où ε est un processus gaussien stationnaire et Γ est la fonction Gamma. T. Opitz a appliqué ce modèle aux précipitations dans les Cévennes alors que M. Ribatet et M. Sedki l'ont appliqué à un jeu de données de température en Suisse.

C. Robert a proposé des modèles max-stables qui sont les limites de processus max-stables : les max-max-stables (cf Figure 9). Il a aussi proposé des modèles basés sur les diagrammes de Voronoï (cf Figure 10).

JN. Bacro et C. Gaetan ont travaillé sur l'estimation de processus max-stables en se basant sur les excès. Ils exploitent les lois de Pareto multi-dimensionnelles pour recueillir plus d'information que celle contenue uniquement dans le maximum.

Plusieurs autres articles ont été écrits traitant de problèmes sur les extrêmes

univariés et multivariés.

Lors de sa thèse, T. Opitz a mis en avant que certains phénomènes climatiques présentaient une dépendance mais pouvaient présenter une indépendance asymptotique (par exemple pour les précipitations dans les Cévennes). Ceci est en contradiction avec les modèles max-stables qui sont asymptotiquement dépendants. J.N. Bacro, C. Gaetan et G. Toulemonde travaillent actuellement sur des processus qui sont dépendants à distance finie mais indépendants asymptotiquement. Une visite scientifique est prévue l'an prochain pour finir cet article.

2 WP2 : Détection de tendance dans les extrêmes

Le deuxième groupe de travail concerne la détection de tendance dans les extrêmes.

a. Principal résultat

Naveau P., Guillou A. et Rietsch, T. (2014) A non-parametric entropy-based approach to detect changes in climate extremes, à paraître dans Journal of the Royal Statistical Society, Serie B.

Dans un contexte de réchauffement climatique, une question naturelle qui intéresse à la fois les climatologues, les assureurs ou les modélisateurs de risque est de savoir si les températures élevées sur les dernières années (par exemple les 30 dernières années, durée habituelle en climatologie), diffèrent de façon significative de celles mesurées au cours des périodes antérieures. Plus particulièrement on cherche à déterminer si oui ou non il y a un changement dans la distribution des extrêmes. Pour cela, on ne veut pas faire d'hypothèses trop fortes sur la distribution, en particulier ne pas s'imposer une densité paramétrique spécifique, mais on privilégiera plutôt une approche non-paramétrique qui puisse être utilisée pour de grands jeux de données.

Une approche classique en climat consiste à construire une série d'indicateurs dits indicateurs extrêmes météorologiques et à étudier leurs variabilités temporelles en termes de fréquence et d'intensité. Le problème avec de tels indices est qu'ils se concentrent souvent sur les extrêmes dits "modérés" (inférieurs à 90%) mais pas sur les extrêmes dits "élevés" (au-delà de 95%). De plus leurs propriétés statistiques ont rarement été établies. Une orientation plus statistique consiste à analyser les extrêmes "élevés" en ayant recours à la théorie des valeurs extrêmes.

En particulier si l'on est prêt à supposer que les maxima de température pour un bloc donné (jours, mois, saisons, ...) sont approximativement de loi $GEV(\mu, \sigma)$ où μ et σ sont respectivement des paramètres de position et d'échelle, alors il est possible d'étudier les changements dans les paramètres de la GEV. Cette méthode est attractive car elle tire pleinement profit de la théorie des valeurs extrêmes. Par

exemple, Jaruskova et Rencova (2008) ont étudié des tests statistiques pour détecter des changements dans des séries de maxima et minima annuels de températures mesurées sur 5 sites météorologiques : Bruxelles, Cadiz, Milan, St. Pétersbourg et Stockholm.

Cette méthode souffre de trois limitations : c'est une approche basée sur le maximum, donc cela écarte toutes les données sauf la plus grande du bloc. Elle impose une forme GEV fixe ce qui est restrictif pour les petits blocs (la GEV étant une distribution limite). Trois paramètres doivent être étudiés pour détecter des changements dans une série chronologique. En ce qui concerne la première limitation une solution classique pour s'en affranchir est de travailler avec les excès au-delà d'un seuil élevé à la place d'un bloc de maxima. Cependant les deux autres limitations restent aussi d'actualité pour le modèle GPD. Dans leur travail, Naveau *et al.* n'imposent pas une forme paramétrique pour la densité et de ce fait, il est impossible de suivre les changements dans les paramètres. Une autre stratégie doit donc être suivie pour comparer les différences de répartition entre les extrêmes.

En théorie de l'information il est coutumier de comparer les densités de probabilité de deux périodes en calculant l'entropie

$$I(f, g) = \mathbb{E}_f \left(\log \left(\frac{f(X)}{g(X)} \right) \right)$$

où X est un vecteur aléatoire de densité f et g est une autre densité. Des modifications ont été apportées à cette distance pour symétriser l'information en utilisant

$$D(f; g) = I(f, g) + I(g, f)$$

On parle alors de divergence de Kullback-Leibler. Si on a deux variables X et Y de densités f et g et de fonction de queue \bar{F} et \bar{G} , on peut définir

$$I(f_u; g_u) = \mathbb{E}_f \left(\log \left(\frac{f_u(X_u)}{g_u(X_u)} \right) \right)$$

où X_u (respectivement Y_u) représente la variable $X|X > u$ (resp. $Y|Y > u$) et f_u (resp. g_u) sa densité (typiquement une loi de Pareto généralisée). Naveau *et al.* ont proposé d'estimer la divergence de Kullback-Leibler par

$$\hat{D}(f_u, g_u) = \hat{I}(f_u, g_u) + \hat{I}(g_u, f_u)$$

où

$$\hat{I} = -\frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\bar{G}_m(X_i \vee u)}{\bar{G}_m(u)} \right) - 1$$

et G_m est la fonction de répartition empirique classique des Y_j et N_n est le nombre de points au dessus de u dans l'échantillon des X_i .

Cet estimateur a ensuite été appliqué aux données de températures à Paris, à la station du parc de Montsouris. Les données ont d'abord été traitées pour enlever la

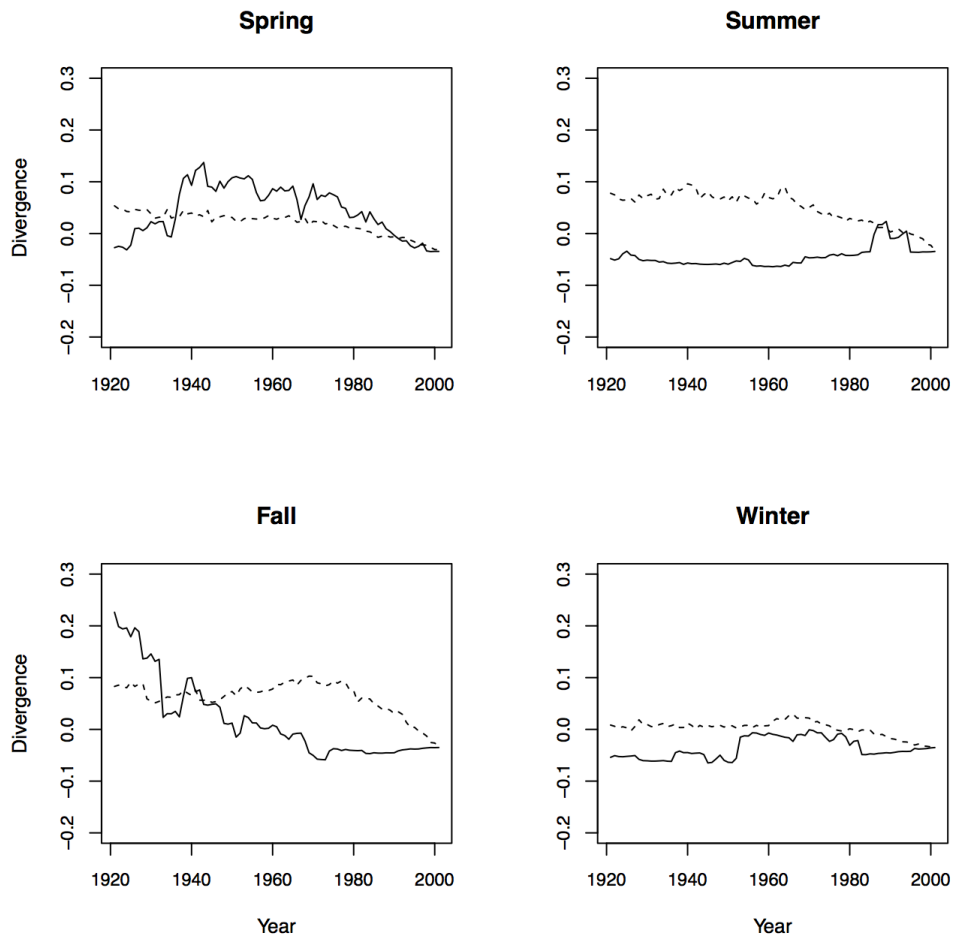


FIGURE 11 – Station de Paris-Montsouris : évolution de l’estimateur de la divergence (courbe en noir) en fonction des années $[1900 + t, 1929 + t[$ avec $t \in \{1, \dots, 80\}$. La période de référence est $[1981, 2010]$. La ligne en pointillé représente un intervalle de confiance à 95% obtenu par une procédure de permutation aléatoire.

tendance moyenne, ainsi, on est sûr que la divergence montrera des écarts dans la distribution des extrêmes et non dans le paramètre de moyenne. Le seuil est fixé au 95-ième percentile. Les résultats sont représentés dans la Figure 11. Il semble que la distribution des extrêmes de températures au début du siècle soit différente de celle actuelle.

Il est aussi possible de quantifier cette différence en calculant combien de temps et de combien la divergence est significativement différente, c'est à dire en comptant le nombre d'années pour lesquelles la divergence estimée est au dessus de la courbe en pointillé et on additionne la divergence pour ces années. Ainsi dans la Figure 12, on a représenté le nombre d'années pour lesquelles la divergence est positive (largueur du cercle) et la divergence cumulée (diamètre du cercle) pour plusieurs stations en Europe.

Maxima

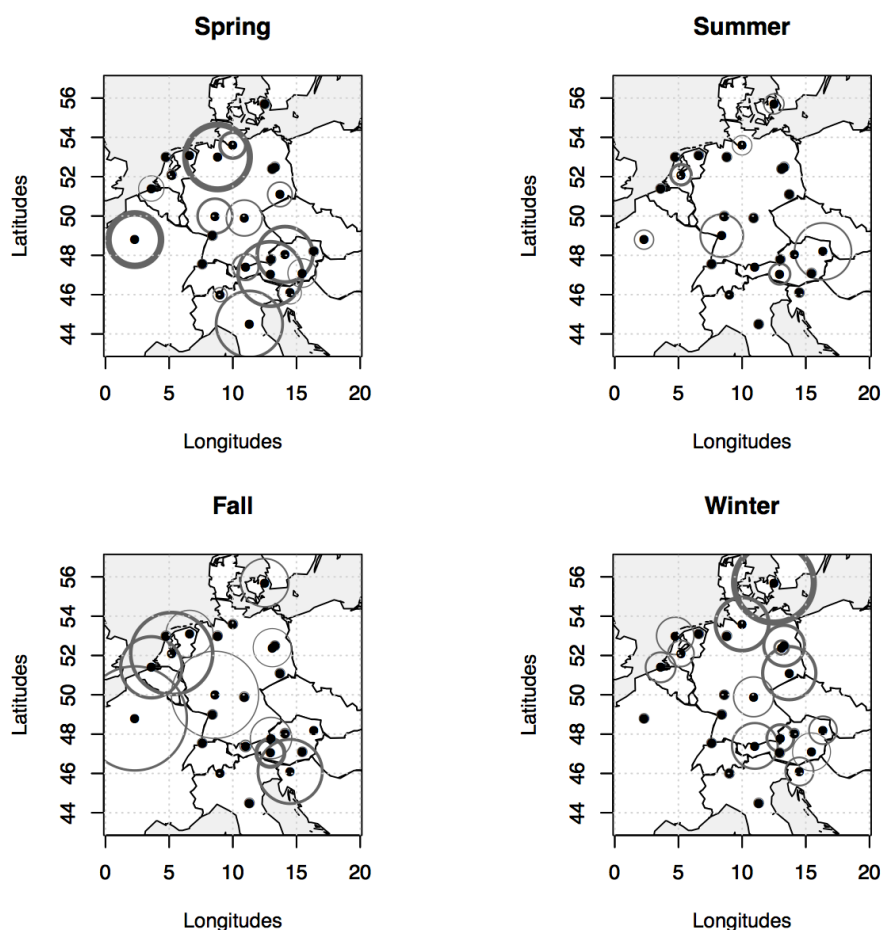


FIGURE 12 – Les points représentent 25 stations en Europe, la constructions des cercles dépend de la divergence.

Si on regarde de nouveau la station de Montsouris, on se rend compte qu'il y a beaucoup d'années où la divergence est positive au printemps mais cette divergence

est très peu au dessus de 0 alors qu'en automne, la divergence n'a pas beaucoup d'années positives mais les années où elle l'est les valeurs sont élevées.

b. Autre résultat

On peut voir cette tendance soit dans la fréquence de survenue de ces événements, soit dans l'intensité. P. Ribereau a regardé des méthodes de détection de rupture dans la survenue des extrêmes en se basant sur des résultats sur le processus de Poisson. Malheureusement, les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants et cette piste a été abandonnée.

A. Hannart et P. Naveau ont proposé un nouveau critère bayésien pour la détection de changement multiple et abrupt. Même si leur modèle n'est pas à l'origine prévu pour détecter des changements dans les extrêmes, il n'y a aucun obstacle technique pour l'étendre aux distributions des extrêmes.

3 WP3 : Nouvelles mesures de risques

Le troisième groupe de travail sur les mesures de risque a été détaillé au début. On rappelle ici les principaux résultats.

a. Principaux résultats

Koch, E. Spatial risk measures based on max-stable processes, en cours de publication.

Comme nous l'avons déjà dit dans la section I, les mesures de risque actuelles ne prennent pas en compte la dépendance spatiale. D'un point de vue assurantiel, les extrêmes spatiaux sont importants puisqu'ils engendrent des pertes considérables. A titre d'exemple, en 2011 les risques climatiques ont provoqués des pertes économiques de l'ordre de 380 milliards de dollars et des pertes de biens assurés de l'ordre de 120 milliards de dollars. En 2012, il y a eu une baisse avec 105 milliards de perte dont 65 pour les compagnies d'assurance. De plus, les secteurs de l'assurance, de la ré-assurance et même le secteur financier sont très sensibles aux catastrophes naturelles. L'évaluation correcte des risques intervient aussi dans le calcul des primes demandées aux assurés mais aussi dans le calcul du capital initial nécessaire à la solvabilité des compagnies. Il apparaît donc nécessaire de bien quantifier ces risques à l'aide de mesures de risque adaptées.

D'un point de vue de la compagnie d'assurance, des mesures de risques adaptées permettent de répondre à des questions comme

- Dans quelle région est-il préférable (sûr) de souscrire des contrats ?
- Quel est le gain lorsque l'on souscrit des contrats sur une région plus étendue ?
- Y a-t-il un bénéfice à être présent dans différentes régions pour diversifier le risque ?

D'où l'idée de proposer une mesure qui peut être vue comme le risque extrême agrégé sur une région donnée et qui tienne compte de la dépendance spatiale.

Pour une région A donnée, on considère la quantité

$$L(A) = \frac{1}{|A|} \int_A \mathbb{I}_{[Z(x) > u]} dx$$

pour un processus Z qui représente la variable climatique et un seuil u fixé. C'est donc la proportion de la région A qui a eu des valeurs du processus Z supérieure à u . Cette quantité permet de comparer deux régions données et de regarder ainsi leur "dangerosité".

La mesure "intuitive" $R_1(A) = \mathbb{E}(L(A))$ n'apparaît comme adaptée car elle ne dépend pas de la structure de dépendance spatiale. Au lieu de cela, on va considérer la quantité :

$$R_2(A) = \mathbb{V}(L(A)).$$

Pour cette mesure, E. Koch a montré qu'il s'agissait d'une mesure de risque cohérente. Le problème de cette mesure est son interprétation, que signifie la variance d'une proportion ? On se base alors sur la mesure

$$L(A) = \int_A Z(x)^\beta dx$$

qui peut être vu comme le risque extrême agrégé sur une région A si Z représente un processus max-stable.

Dans la littérature, Kława et Ulbrich (2003), Pinto *et al.* (2007) ou encore Donat *et al.* (2011) ont montré que les montants des sinistres liés au vent sont proportionnels à la vitesse du vent au cube. Si on prend $\beta = 3$, on peut voir cette mesure de risque comme les montants agrégés de sinistres du au vent sur la région A .

Pour toutes ses mesures, on peut montrer leur homogénéité, l'invariance par translation ou encore la sous-additivité asymptotique.

Biard, R. *et al.* (2014) Impact of Climate Change on Heat Wave Risk, Risks, 1(3), 176-191

Cette mesure de risque a déjà été présentée dans la section I. On se fixe un instant T qui représente le moment où on arrête de regarder la mesure de risque. X_t est le processus de température maximale et Y_t le processus de température minimale. Ce qu'on appelle l'"aire en rouge" est la quantité définie par :

$$A_X(x) = E \left(\int_0^T |X_t - x| 1_{\{X_t > x\}} dt \right)$$

où x est le plus haut niveau acceptable pour la température maximale. Dans l'esprit de caractériser mieux les canicules (définie en fonction d'une température minimale et maximale), on peut étendre cette aire par cette quantité :

$$B_{X,Y}(x, y) = E \left(\int_0^T |X_t - x| 1_{\{X_t > x, Y_t > y\}} dt \right).$$

La mesure de risque est alors l'espérance de l'une de ces deux quantités. Les auteurs ont montré que ces mesures possèdent les propriétés de base d'une mesure de risque ainsi que des propriétés d'ordre convexe ou de différentiabilité.

b. Autres résultats

E. Di Bernardino et A. Cousin ont proposé de nouvelles mesures de risque simples dans le cadre multivarié. Il s'agit d'étendre les notions de VaR (ou de quantile extrêmes) et de TVaR (c'est à dire $\mathbb{E}(X|X > VaR)$) dans le cas où la variable X est de dimension d . En théorie, les extensions naturelles sont des courbes dans les espaces de dimension d . Leur simplification permet d'obtenir des mesures de risques se présentant comme un vecteur de dimension d , assez facilement interprétable et calculable dans la pratique. L'étape suivante consistera à étendre ces résultats au cas spatial.

4 WP4 : Assurabilité des risques climatiques

Le dernier groupe de travail sur l'assurabilité des risques climatiques a apporté des résultats intéressants.

a. Principaux résultats

Les premiers résultats font intervenir la probabilité de ruine d'une compagnie d'assurance. Typiquement une compagnie d'assurance va commencer son exercice avec un capital u , va encaisser des primes et va devoir rembourser des sinistres. En termes mathématiques, on peut formuler le problème de la façon suivante :

- les montants de sinistre $(X_i)_i$ sont des variables aléatoires positives,
- les temps d'arrivée des sinistres (u_1, u_2, \dots) forment un processus de Poisson,
- $N(t) = \sup \{n \geq 1 : u_n \leq t\}$ est le nombre de sinistres sur l'intervalle $[0, t]$.

Le processus de risque est alors défini par

$$U(t) = x + ct - S(t)$$

où u est le montant initial des réserves de la compagnie d'assurance, c est le taux instantané de prime (ce que payent les assurés), ct est donc la prime encaissée sur l'intervalle $]0, t]$ et

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i & \text{si } N(t) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce processus $U(t)$ représente donc les réserves de la compagnie à l'instant t . La probabilité de ruine est alors définie comme la probabilité que $U(t)$ passe en dessous de 0, c'est à dire

$$\Psi(u) = \mathbb{P}(U(t) < 0 \text{ pour un } t \geq 0).$$

Cette probabilité dépend donc du montant initial de la compagnie (plus ce montant est élevé, plus cette probabilité est faible), ainsi que des hypothèses du modèles. Mais comme la compagnie ne peut pas contrôler les montants des sinistres ou leurs temps de survenue, elle ne peut contrôler cette probabilité qu'en "jouant" sur u et c (la prime versée par les assurés). On peut aussi remarquer que cette probabilité définit une mesure de risque.

Les hypothèses qui sont habituellement faites sont que les montant de sinistres $(X_i)_i$ forment une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées, le processus de Poisson est un processus homogène dans le temps et les suites $(X_i)_i$ et (u_i) sont indépendantes. Sous ces hypothèses, il existe un littérature abondante pour calculer cette probabilité de ruine. Une trajectoire du processus de risque sous ces hypothèses est représentée dans la Figure 13.

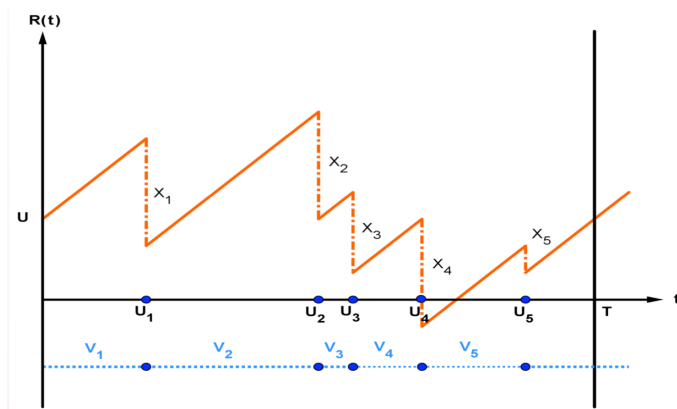


FIGURE 13 – Exemple de trajectoire du processus de risque : la compagnie démarre avec un capital initial égal à u , encaisse des primes au cours du temps et aux instants u_i doit rembourser un sinistre d'un montant x_i . Ici la ruine est observée à l'instant u_4 .

Dans le cadre des normes prudentielles définies dans Solvabilité 2, les compagnies d'assurance doivent s'assurer que leur probabilité de ruine soit inférieure à 0,005 chaque année, c'est pourquoi cette quantité est centrale dans le monde de l'actuariat.

Kortschak *et al.* (en révision) : Ruin problems with worsening risks or with infinite mean claims

Habituellement, l'hypothèse que retienne les compagnies d'assurance est qu'il faut que l'espérance des sinistres soit finie ($\mathbb{E}(X_i) < \infty$). Or, des travaux récents montrent que si l'on regarde des horizons de temps finis, on peut toujours obtenir une probabilité de ruine inférieure à 1 en augmentant considérablement la valeur du capital initiale u . L'idée de l'article de Kortschak *et al.* est de considérer des sinistres X_i dont la distribution sera une loi de Pareto dont le paramètre de forme va augmenter avec le temps (modèle 1) ou dont le paramètre d'échelle va augmenter avec le temps (modèle 2), dans l'esprit d'avoir une modélisation qui corresponde mieux au changement climatique.

En termes mathématiques, on suppose que le processus de Poisson N_t est d'intensité λ , les X_t sont indépendants et de fonction de répartition commune

$$F(t) = 1 - (1 + x/d_t)^{-\alpha_t}$$

et le changement dans la distribution des X_t est caractérisé par

$$\mathbb{E}(X_t) = \frac{d}{\alpha_0 - 1}(1 + c_{\alpha t}).$$

Le paramètre c_{α} est la paramètre qui va contrôler l'évolution des montants de sinistres. On considère alors le processus de risque

$$R_t = u + \int_0^t (1 + \rho)\lambda\mathbb{E}(X_t)dt - \sum_{i=1}^{N(t)} X_{u_i}.$$

Ici, au lieu d'utiliser une prime c fixe, on utilise le chargement de sécurité ρ qui consiste à encaisser sur la période $]0, t]$ l'espérance des montants de sinistres plus un pourcentage de sécurité.

Si on veut faire varier le paramètre α_t tout en conservant la valeur de $\mathbb{E}(X_t)$, cela signifie que :

$$\alpha_t = \frac{\alpha_0 - 1}{1 + c_{\alpha}t} + 1.$$

Cela correspond au premier modèle. Pour le second modèle, on fait varier le paramètre d_t et on obtient que

$$d_t = d(1 + c_{\alpha}t).$$

Dans ces deux cas, on peut trouver des équivalents asymptotiques à la probabilité de ruine. Pour le premier modèle, on a :

$$\psi^{(1)}(u) \sim \lambda \sqrt{\frac{2u(\alpha_0 - 1)}{(1 + \rho)\lambda c_{\alpha}}} (1 + u/d)^{-1} \int_0^{\infty} (1 + t^2)^{-1} dt \sim \frac{\pi d u^{-0.5}}{2} \sqrt{\frac{2(\alpha_0 - 1)}{(1 + \rho)\lambda c_{\alpha}}}.$$

Pour le second modèle, on obtient :

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}(u) &\sim \frac{\lambda}{c_\alpha} \sqrt{u} \left(1 + \frac{\sqrt{u}}{d}\right)^{-\alpha_0} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} + \frac{\rho\lambda\mu}{2c_\alpha}t\right)^{-\alpha_0} dt \\ &\sim \frac{\lambda}{c_\alpha} d^{\alpha_0} u^{-\frac{\alpha_0-1}{2}} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} + \frac{\rho\lambda\mu}{2c_\alpha}t\right)^{-\alpha_0} dt.\end{aligned}$$

Si on s'intéresse au processus de surplus qui correspond aux pertes de la compagnie moins les primes, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{N(t)} X_{u_i} - \int_0^t (1 + \rho)\lambda\mathbb{E}(X_t)dt$$

on peut alors, à l'aide de simulations, trouver le montant u nécessaire à la solvabilité de la compagnie. Un exemple de simulation de quelques trajectoires est donné dans la Figure 14.

Kortschak *et al.* (soumis) : Second order tail asymptotics for the sum of dependent, tail-independent regularly varying risks : Or a first try to calculate the cost of climate change for insurance companies.

On considère maintenant le processus de surplus suivant :

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} \mu(u_i)X_i - ct$$

où N_t est un processus de Poisson d'intensité $\lambda(t)$ et c est la prime. u_i est le temps de survenue du i -ème sinistre. Les $(X_i)_i$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une distribution à variations régulières $\alpha > 1$. Le paramètre $\mu(u_i)$ est donc un paramètre qui va contrôler l'intensité de l'événement survenu au temps u_i .

L'idée ici est de faire varier l'intensité du processus de Poisson afin de mieux respecter les cycles climatiques. Typiquement, nous allons prendre un processus qui présente une saisonnalité et une tendance, ce qui se traduit par : il y a plus de risques climatiques à certaines périodes de l'année et ces risques vont augmenter dans le temps.

On va considérer dans ce modèle aussi que $\mu(\cdot) = \lambda(\cdot)$, c'est à dire que l'intensité des événements climatiques est directement liée à leur "probabilité" d'occurrence. Par exemple, les sinistres liés à la grêle sont d'autant plus important que l'on se situe dans les périodes de l'année où la grêle a une plus forte probabilité d'apparition.

Dans ce cas là, on peut calculer un équivalent asymptotique de la probabilité de ruine avec :

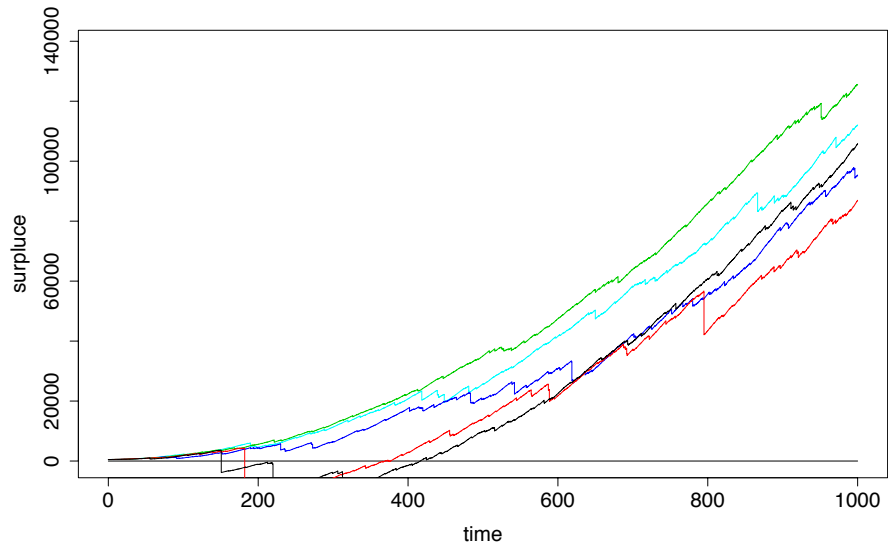
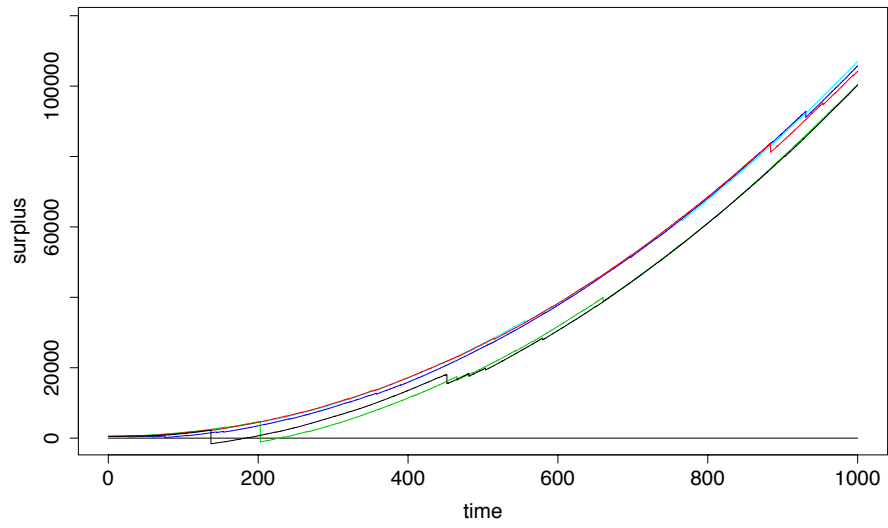


FIGURE 14 – Simulations de trajectoires du processus de surplus dans le modèle 1 (haut) et 2 (bas).

$$\begin{aligned}
& \psi(u, T) \\
& \approx \mathbb{E} \int_0^T \lambda(t) \mathcal{F}(u/\mu(t)) dt \\
& + f(u) \int_0^T \lambda(t) \left(\mu(t) \mathbb{E} X_1 \int_0^t \mu(y)^\alpha \lambda(y) dy + \mu(t)^\alpha \left(\mathbb{E} X_1 \int_0^t \mu(x) \lambda(x) dx - ct \right) \right) dt
\end{aligned}$$

Pour les applications numériques, on va considérer

$$\mathcal{F}(x) = (1 + x)^{-\alpha}.$$

avec $\alpha = 2.5$ et

$$\mu(t) = \lambda(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{0.075}{120} \left(\frac{t}{T}\right)^2.$$

On travaillera aussi sur le même modèle mais sans changement climatique, c'est à dire avec

$$\mu^*(t) = \lambda^*(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

La Figure 15 représente un graphique de μ et de μ^* . On choisit ensuite $T = 12$ (pour 12 mois). On peut remarquer que l'espérance des sinistres sur un an est donnée par :

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^{N_T} \mu(u_i) X_i = \mathbb{E} X_1 \int_0^T \mu(t) \lambda(t) dt$$

La Figure 16 représente l'évolution de cette espérance. La prime est calculée par :

$$c = 1.1 \times \frac{1}{T} \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N_t} \mu(u_i) X_i.$$

C'est à dire que chaque année, la compagnie va encaisser 10% de plus que le montant moyen de sinistres qu'elle va avoir. Ensuite, on cherche, à partir de l'équivalent asymptotique de la probabilité de ruine, le montant initial u tel que $\Psi(u) = 0,005$ pour respecter le cadre Solvabilité 2. La Figure 17 représente le capital initial divisé par l'espérance des montants de sinistres sur l'année. Finalement, on peut estimer le coût du changement climatique pour une compagnie d'assurance par la formule

Coût du CC = Capital initial avec CC – Capital initial sans CC – $0.1 \times$ Primes collectées
représenté dans la Figure 18.

Ce dernier modèle est très souple et permettrait facilement d'estimer le coût du changement climatique si l'on disposait de données réelles d'une compagnie d'assurance pour la branche risque climatique.

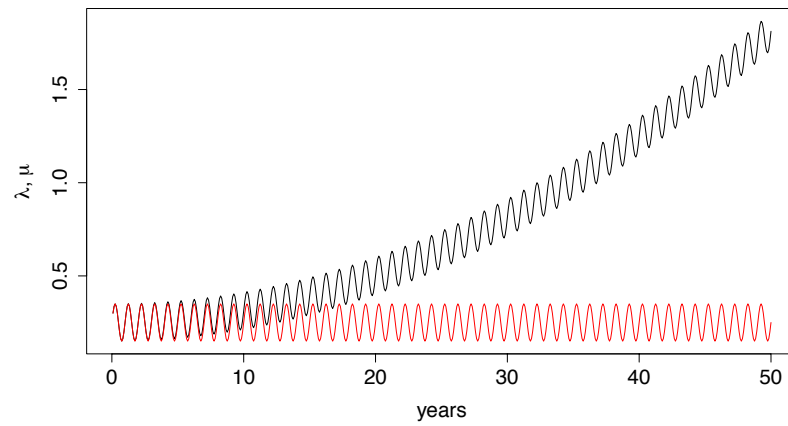


FIGURE 15 – Intensité du processus de Poisson avec et sans changement climatique pour le modèle utilisé pour l’application numérique.

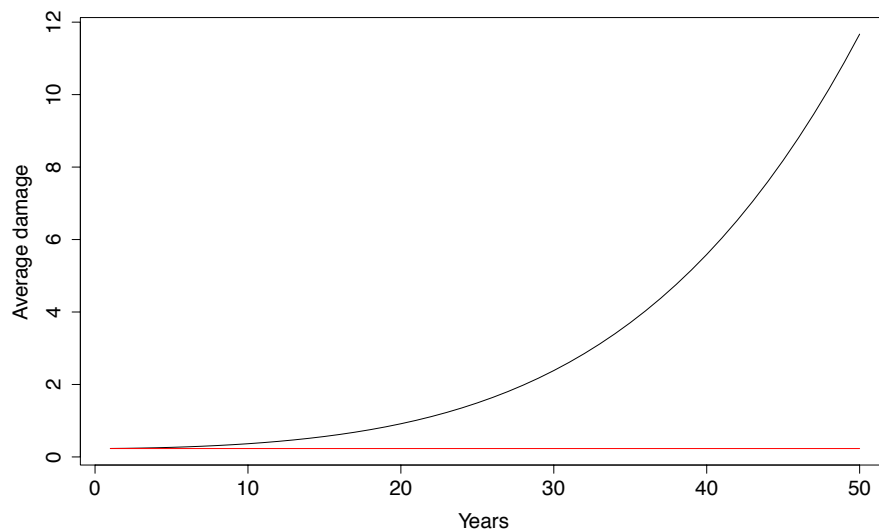


FIGURE 16 – Evolution de l’espérance des sinistres par an dans le modèle utilisé.

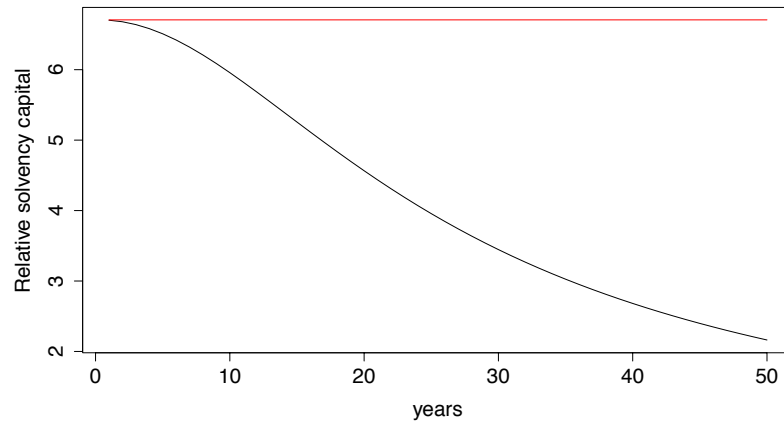


FIGURE 17 – Capital initial u pour chaque année afin d’assurer une probabilité de 0,005 divisé par la moyenne des sinistres.

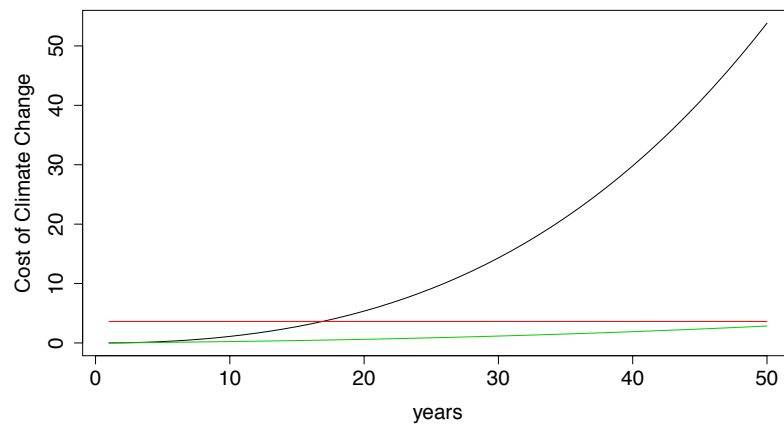


FIGURE 18 – Evolution du coût du changement climatique chaque année dans le modèle utilisé.

b. Autres résultats

Les travaux de M. Bargès, C. Constantinescu, H. Cossette, D. Kortschak, S. Loisel, E. Marceau, V. Maume-Deschamps et R. Norberg présentent des modèles pour la probabilité de ruine où les sinistres ne sont pas indépendants ou possèdent une structure de dépendance de chaîne de Markov. Ces modèles peuvent être adaptés au cas de données climatiques.

Les résultats d'E. Koch sur les mesures de risques spatiales permettent aussi de mieux tarifier les produits dérivés de type Cat-Bond. En pratique, on procède de la façon suivante :

- on se base sur les données historiques climatiques, on ajuste différents modèles max-stables (Smith, Schlather, Brown-Resnick...)
- on estime les paramètres de chacun de ces modèles via la vraisemblance simulée ou la vraisemblance composite,
- on sélectionne le meilleur modèle max-stable via un critère de sélection (AIC par exemple ou le rapport de vraisemblance),
- on choisit le modèle qui lit la variable climatique aux pertes économiques,
- on calcule la mesure de risque associée en utilisant la méthode décrite dans l'article de E. Koch.

IV Poursuite du projet

Le point positif du projet Miracle est d'avoir créé une communauté autour de l'actuariat et du changement climatique, ce qui assure que le projet va continuer à vivre après sa fin. Nous présentons ici quelques projets qui s'inscrivent dans la continuité du projet :

- Le projet Miracle va participer financièrement et logistiquement dans l'organisation d'une conférence qui aura lieu en Avril/Mai sur l'innovation technique pour se couvrir contre les risques climatiques. Cette conférence va être organisée en collaboration avec l'Association des Centraliens de Paris et la Caisse Centrale de Réassurance (CCR). Elle regroupera à la fois des intervenants académiques venant d'horizons différents (climatologues, statisticiens, actuaires..) ainsi que des intervenants professionnels venant du milieu de l'assurance et de la réassurance. Nous attendons entre 150 et 200 participants.
- C. Robert, M. Ribatet, J. Segers et C. Dombry travaillent actuellement sur la construction de modèles max-stables spatio-temporels.
- La CCR a proposé une thèse CIFRE sur le thème de la modélisation et la gestion du risque inondation en France. Cette thèse a commencé début décembre et va s'appuyer sur des résultats obtenus dans le cadre du projet. En parallèle, E. Masiello et P. Ribereau collaborent avec H. Cossette et E. Marceau sur des modélisations des montants de sinistres liés au risque inondation avec la conséquence sur le processus de surplus.

- L'équipe de Montpellier va continuer à collaborer avec C. Gaetan pour approfondir les techniques d'estimation des processus max-stables. Une visite scientifique chez ce chercheur est prévue pour l'an prochain.
- V. Maume-Deschamps co-encadre une thèse qui vient de débiter sur des mesures de risques spatio-temporelles. L'idée est de combiner les deux mesures de risque présentées dans la section III mais dans un cadre non extrême, ce qui permettra de construire une vraie mesure de risque spatio-temporelle.
- Le projet bénéficie du soutien de Generali et la CCR. Ces collaborations permettront de mettre en oeuvre les résultats théoriques obtenus dans le milieu de l'assurance et de la réassurance.
- J.N. Bacro et G. Toulemonde dirigent la thèse de Néjib Dalhoumi depuis septembre 2013 dont le sujet est "Modèles pour la dépendance d'extrêmes spatio-temporels". N. Dalhoumi a travaillé sur la modélisation de la fonction de survie jointe d'un couple proposée par Ramos et Ledford permettant une écriture unifiée des cadres de dépendance asymptotique et d'indépendance asymptotique. Il s'intéresse dans le cadre de sa thèse à des modèles spatiaux pouvant intégrer cette notion d'indépendance asymptotique par des approches type Ramos. Ces travaux s'inscrivent donc directement dans cette idée que certains phénomènes climatiques sont asymptotiquement indépendants.
- Finalement, l'équipe de Montpellier se rapproche de la MSE (Maison des Sciences de l'Eau). Ils ont proposé un sujet de stage de M2 commun (encadré par Gwladys Toulemonde et Julie Carreau) sur le thème "Comparaison des modèles de processus spatiaux des pluies extrêmes pour l'estimation du risque hydrologique". Même si il s'agit d'un premier pas, il y a là une volonté claire de collaborer dans le futur et dans le cadre du projet Miracclé.

V Conférences, articles publiés, acceptés ou soumis

1 Conférences

Les membres du projet Miracclé se sont réunis 6 fois au cours des 3 années du projet. Malgré la fin du projet, une réunion est prévue fin janvier pour continuer à travailler ensemble.

Miracclé a participé à l'organisation du workshop "Changement climatique et gestion des risques" les 14 et 15 Novembre 2011. Cet événement a réuni une quarantaine de participants autour des thèmes du projet. Cela a permis de faire se rencontrer des chercheurs d'horizons divers (climatologues, météorologues, statisticiens, actuaires...).

Miracle a participé aussi aux Entretiens Jacques Cartier les 19 et 20 Novembre 2012.

Miracle a participé financièrement à un workshop organisé dans le cadre de l'habilitation à diriger des recherches de C. Dombry (université Poitiers) dont les travaux sont fortement orientés processus max-stables. Ce Workshop a eu lieu à Poitiers en Octobre 2012.

Il est prévu d'organiser en avril/mai 2014 une conférence internationale sur la couverture des risques climatiques et le changement climatique.

Enfin, les travaux issus du projet Miracle ont fait l'objet d'une soixantaine de présentations dans divers congrès, conférences et séminaires dont 30 en tant que conférencier invité.

2 Articles publiés ou acceptés

1. **Bacro, J.N.** et Gaetan, C. (2012) *A review on spatial extreme modelling. Space-Time Processes and Challenges Related to Environmental Problems, Proceedings of the Spring School, Advances and Challenges in Space-Time Modelling of Natural Events*", Toledo. Series : Lecture notes in Statistics.
2. **Bacro, J.N.** et Gaetan, C. (2013). *Estimation of spatial max-stable models using threshold exceedances*. Statistics and Computing, à paraître.
3. **Bacro, J.N.** et **Toulemonde, G.** (2013). *Measuring and modelling multivariate and spatial dependence of extremes*. Journal de la Société Française de Statistique, 154, 2, 139-155.
4. Bargès, M., Cossette, H., **Loisel, S.** et Marceau, E. (2011) *Moments of a compound Poisson models with dependence based on the FGM copula and discounted claims*, ASTIN Bulletin, Vol. 41, No 1, 215-238.
5. Biard, R., Blanchet-Scalliet, C., **Eyraud-Loisel, A.** et **Loisel, S.** (2013) *Impact of Climate Change on Heat Wave Risk*, Risks, 1(3), 176-191.
6. Blanchet-Scalliet, C., **Dorobantu, D.** et Rullière, R. (2013) *The density of a passage time for a renewal-reward process perturbed by a diffusion*, Applied Mathematics Letters, 26, pp 108-112.
7. Constantinescu, C., Kortschak, D., et **Maume-Deschamps, V.** (2013) *Ruin probabilities in models with a Markov chain dependence structure*. Scandinavian Actuarial Journal, 6, pp 453-476.

8. Constantinescu, C., **Maume-Deschamps, V.**, et Norberg, R. (2012) *Risk processes with dependencies and premium adjusted to solvency targets*. European Actuarial Journal of Statistics, 2(1), pp 1-20
9. Cooley D., Davis, R. A., **Naveau, P.** (2013) *Approximating the Conditional Density Given Large Observed Values via a Multivariate Extremes Framework, with Application to Environmental Data*, Annals of Applied Statistics, 6(4), 1406-1429.
10. **Cousin, A.** et Di Bernardino, E. (2013) *On Multivariate Extensions of Value-at-Risk*, Journal of Multivariate Analysis, 119, 32-46
11. **Cousin, A., Dorobantu, D., et Rullière, D.** (2013), *An extension of Davis and Lo's contagion model*. Quantitative Finance, 13(3), pp 407-420.
12. Davison, A. C., Padoan, S. A. et **Ribatet, M.** (2012) *Statistical modelling of spatial extremes (with discussion)*, Statistical Science, 27(2), pp 161–186
13. Di Bernardino, E., Laloe, T., **Maume-Deschamps, V.**, et Prieur, C. (2013) *Plug-in estimation of level sets in a non compact setting with applications in multivariate risk theory*. ESAIM Probability and Statistics, (2013), 17, 236-256.
14. Di Bernardino, E., **Maume-Deschamps, V.** et Prieur, C. (2013) *Estimating a Bivariate Tail, a copula based approach*. Journal of MultiVariate Analysis, 119, pp 81–100.
15. Di Bernardino, E., et **Rullière, D.** (2013) *On certain transformations of Archimedean copulas : Application to the non-parametric estimation of their generators*. Dependence Modeling, vol. 1, pp 1-36.
16. Di Bernardino, E. et **Rullière, D.** (2013), *Distortions of multivariate distribution functions and associated level curves : applications in multivariate risk theory*. Insurance : Mathematics and Economics, 53(1), pp 190-205.
17. Dombry, C., Eyi-Minko, F. et **Ribatet, M.** (2013). *Conditional simulations of max-stable processes*. Biometrika 100(1), pp111-124.
18. Gilleland, E., **Ribatet, M.** et Stephenson, A. G. (2013) *A comparative software review for extreme value analysis*, Extremes, 16(1), pp 103–119
19. Guillou, A., **Naveau, P.** et Schorgen, A. (2013). *Madogram and asymptotic independence among maxima*. Revstat, 12(2).

20. Guillou .A, **Naveau P.** et You A. (2014) *A folding methodology for multivariate extremes : estimation of the spectral probability measure and actuarial applications.* A paraître dans Scandinavian Actuarial Journal.
21. Hannart, A., Ghil, M., Dufresne, J.F. et **Naveau, P.** (2014) *Disconcerting learning on climate sensitivity and the uncertain future of uncertainty.* A paraître dans Climatic Change.
22. Hannart M., **Naveau P.** (2012) *An improved Bayes Information Criterion for multiple change-point models.* Technometrics, 54(3), pp 256–268.
23. M. Kacem, **Loisel, S.** et **Maume-Deschamps, V.** (2013) *Some mixing properties of conditionally independent processes.* A paraître dans Communication in Statistics - Theory and Methods.
24. Kallache M., **Naveau P.** et Vrac. M. (2013) *Spatial assessment of precipitation deficits in the Duero basin (central Spain) with multivariate extreme value statistics,* Water Research Resources, 49(10), pp 6716–6730.
25. Kallache M., Vrac, M., **Naveau, P.** et Michelangeli, P. A. (2011) *Non-stationary probabilistic downscaling of extreme precipitation.* J. Geophys. Res. - Atmospheres, VOL. 116, D05113.
26. **Masiello, E.** (2012) *On semiparametric estimation of ruin probabilities in the classical risk model.*Scandinavian Actuarial Journal, 1, pp1–26
27. **Naveau P.,** Guillou A. et Rietsch, T. (2014) *A non-parametric entropy-based approach to detect changes in climate extremes.* A paraître dans Journal of the Royal Statistical Society, series B.
28. **Naveau P.,** Zhang, Z., Zhu, B. (2011) *An Extension of Max Autoregressive Models,* Statistics and its Interface, vol. 4, 2, p253-266.
29. **Opitz, T.** (2013). *Extremal t processes : Elliptical domain of attraction and a spectral representation,* Journal of Multivariate Analysis. A paraître.
30. **Ribatet, M.** (2013) *Spatial extremes : Max-stable processes at work.* Journal de la Société Française de Statistique, Volume 154, 2, 156-177.
31. **Ribatet, M.,** Cooley, D. et Davison, A. C. (2012) *Bayesian inference from composite likelihoods, with application to spatial extremes.* Statistica Sinica, 22, pp 813–845.

32. **Ribatet, M.** et Sedki, M. (2013) *Extreme value copulas and max-stable processes*. Journal de la Société Française de Statistique, 154(1), pp. 138–150.
33. **Ribereau P., Naveau, P.** et Guillou, A. (2011) *A note of caution when interpreting parameters of the distribution of excesses*. Advances in Water Resources, 34 pp. 1215–1221
34. Rietsch, T. et **Naveau, P.** Gilardi, N. et Guillou, A. (2014) *Network design for heavy rainfall analysis*. A paraître dans Journal of Geophysical Research : Atmospheres.
35. **Robert, C.** (2013) *Automatic declustering of rare events*. Biometrika, 100 (3), pp 587-606.
36. **Robert, C.** (2013) *Some new classes of stationary max-stable random fields*. Statistics and Probability Letters, 83, pp 1496-1503.
37. **Rullière, D.**, Faleh, A., Planchet, F., Youssef, W. (2013) *Exploring or reducing noise ?, a global optimization algorithm in the presence of noise*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 47(6), pp 921–936.
38. Sabourin, A. et **Naveau, P.** (2014). *Dirichlet Mixture model for multivariate extremes*. Computational Statistics and Data Analysis, 71, pp 542–567.
39. Sabourin, A., **Naveau, P.** et Fougères A.L. *Bayesian Model averaging for Multivariate extremes*, Extremes, à paraître.
40. **Toulemonde, G.**, Guillou A. et **Naveau P.** (2013) *Particle filtering for Gumbel distributed daily maxima of methane and nitrous oxide*, Environmetrics, 24, pp. 51–62.
41. **Toulemonde, G., Ribereau, P., Naveau, P.** (2014) *Applications of Extreme Value Theory to environmental data analysis*. A paraître dans Monograph AGU, Extreme Events : Observations, Modeling and Economics.

3 Articles soumis pour publication

1. Bernard, E., **Naveau, P.**, Vrac, M. et Mestre, O. (2013) *Clustering of maxima : Spatial dependencies among heavy rainfall in France*. Journal of Climate, En révision.
2. **Cousin, A.** et Di Bernardino, E. *On Multivariate Extensions of Conditional-Tail-Expectation*

3. Cuberos, A., Masiello, E. et Maume-Deschamps, V. *Kernel based estimation of the spectral measure*
4. Dombry, C. et Ribatet, M. *Functional regular variations, Pareto processes and peaks over threshold.*
5. Hannart A., Naveau, P. *Estimating high dimensional covariance matrices : a new look at the Gaussian conjugate framework.*
6. Hannart, A., Ribes, A. et Naveau, P. *Optimal fingerprinting under multiple sources of uncertainty*
7. Kortschak, D., Loisel, S. et Ribereau, P. *Ruin problems with worsening risks or with infinite mean claims.* (en révision).
8. Kortschak, D., Masiello, E. et Ribereau, P. *On ruin probability and climate change.*
9. Masiello, E. Naveau, P. et Ribereau, P. *Skew Generalized Extreme Value Distribution : Probability Weighted Moments Estimation and Application to Block Maxima Procedure.*
10. Naveau, P., Ribereau, P. et Hannart, A. *Modeling jointly moderate and heavy rainfall intensities without a threshold selection*
11. Naveau P., Smith, I., Toreti, A. et Xoplaki, E. *A fast non-parametric inference for heavy precipitation.*
12. Opitz, T. *Threshold-based multivariate extremal inference with Radial Pareto Distributions.*
13. Opitz, T., Bacro, J.-N. et Ribereau, P. *The spectrogram : A threshold-based inferential tool for extremes of stochastic processes.*
14. Ribereau, P. *A combined threshold-block size selection procedure.*
15. Ribereau, P. et Rullièrè, D. *Information agrégation and kriging alternative in a noisy environment*